LA RAZÓN DE SER DE ESTAS CARTILLAS

Luego de más de cuarenta años de titubear en torno a búsquedas pedagógicas, la Escuela Pedagógica Experimental ha logrado algunos resultados que creemos que vale la pena compartir con la comunidad. Definitivamente estamos convencidos de la importancia de unir esfuerzos para conseguir una escuela que realmente corresponda a nuestras posibilidades, a nuestra historia de realizaciones y a las capacidades que hemos mostrado los colombianos.

Son muchos los temas que podríamos incluir con estas intenciones. Unos relacionados con las disciplinas, otros con la pedagogía propiamente dicha y, en fin, muchos concernientes a las estrategias que hemos construido para convertir en realidad lo que podríamos denominar la *Pedagogía EPE.*

Por otra parte, los protagonistas de esta gesta hemos sido muchos. Por la EPE han transitado en estos 40 años más de 300 maestros, hemos graduado más de 1.000 bachilleres y recordémoslo, si la escuela existe, ello ha sido posible por que han existido los padres de familia, un grupo de colombianos que ha creído en nosotros, en la EPE, y que a través de las pensiones la ha mantenido viva, financiándola.

Lo que se hace entonces en el momento de escribir estas cartillas es sistematizar aspectos puntuales de la EPE, que tienen la impronta de quien lo hace. Habrá en el futuro diversas perspectivas de sistematización y entonces tendremos muchos planteamientos alternativos para las mismas experiencias. Tendremos muchas EPEs.

LAS MATEMÁTICAS EN LA EPE

Una de las quejas que motivó la creación de la EPE era nuestro descontento por lo que la escuela tradicional hace con las disciplinas, concretamente al convertir el conocimiento en información.

Planteado eso, lo que quedaba como tarea era ingente: ¿Entonces qué hacer?

Fue entonces cuando iniciamos la exploración, el estudio y la práctica reflexiva en la escuela con los maestros y estudiantes.

Por el origen disciplinario de los fundadores lo que primero abocamos fue digamos la formación en matemáticas, ciencias y democracia. Hoy, aunque no todo está absolutamente claro, sí podemos avanzar un tanto y compartir lo que en líneas generales es la academia en la EPE.

La estructuración de la perspectiva de las matemáticas ha tenido la contribución de más de 50 maestros de la EPE. Si vamos al origen fueron tal vez las lecturas de J. Piaget, de S. Kuhn y de A.Koyré las que desde hace unos 40 años nos mostraron que el aprendizaje como una revolución o acomodación debe surgir de enfrentarse a conflictos y situaciones inesperadas. Ese modelo de aprendizaje lo expusimos formalmente en el libro *La enseñanza de la Física, dificultades y perspectivas (Segura D. 1993)*, publicado por el Fondo Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Hace unos quince años descubrimos que lo que hacíamos en la práctica era explorar las posibilidades de la abducción en la construcción disciplinaria. Es por ello que comenzamos con esa temática como lo central de estas cartillas. En realidad, fue la perspectiva abductiva lo que nos permitió estructurar la academia en torno de la creatividad, que nos llevó a una manera totalmente antagónica a lo que es la academia en nuestras escuelas usuales.

Lo que sucede es que mientras la escuela en el mundo está centrada en la difusión de los resultados de la actividad matemática o científica, esto es, en la repetición y memorización de resultados y algoritmos, nuestra propuesta enfatiza en transitar los procesos de construcción de las disciplinas recorriendo los procesos de elaboración de hipótesis y solución de problemas.

Nos interesa más el camino de producción del saber que los resultados desnudos que se obtienen.

3

HACIENDO MATEMÁTICAS

El pensamiento abductivo

Dino Segura

1. La lógica (abductiva)

Este triángulo NO es equilátero.

Si decimos que los ángulos internos de un triángulo suman 180º eso es cierto para TODOS los triángulos que existen en el plano. Entonces, cualquiera podría decir cuál es el valor de los ángulos de un triángulo equilátero. Si es equilátero, tendrá los tres lados iguales y los tres ángulos también serán iguales y si los tres ángulos son iguales, tienen que ser de 60º cada uno.

¡Es lógico, los tres suman 180º!

En esta lógica, una cosa se va deduciendo de la otra y otra se deducirá de la primera y, así deductivamente se van armando las afirmaciones y construyendo las conclusiones. Se construyen conclusiones, pero no se avanza en novedades: todo lo que se logra con las conclusiones ya se encuentra previamente en la premisa mayor. La lógica deductiva es bastante "lógica" y a la vez, bastante estéril a la hora de hacer novedades.

Entonces de dónde surgen las novedades en matemáticas, se preguntaba Poincaré, y de dónde surgen las hipótesis y explicaciones en la ciencia se planteaba Pierce.

Pero en la vida cotidiana las cosas no siempre funcionan de esta manera las deducciones son muy escasas, lo que encontramos usualmente son *(aparentemente)* consecuencias del azar y del caos.

> Si dejo el compás sobre la mesa, donde siempre lo he dejado y cuando lo requiero no lo encuentro allí, eso no solo me disgusta, sino que exige una explicación: ¿qué pudo haber pasado? Yo no estoy tan loco, la última vez lo tuve que haber dejado allí, siempre lo hago.
>
> *ENTONCES SE ME OCURRE UNA IDEA: Seguro vino mi sobrino que le encanta jugar con mis cosas.*
>
> Es una hipótesis que funciona para el caso, de la siguiente manera:

1. Hay algo que me molesta y es que las cosas no estén en su lugar. ¿Qué pasó?, es la pregunta que requiere explicación.
2. Si mi sobrino hubiese estado aquí … (me planteo la hipótesis).
3. (Por lo que lo conozco), eso explicaría las cosas.

> Entonces planteo esa hipótesis que si es cierta lo aclara todo. Ahora bien, planteo esa hipótesis porque tengo razones para hacerlo (por ejemplo,

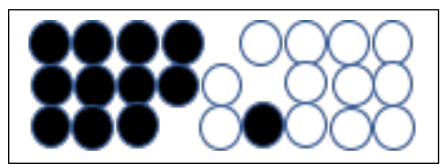
porque efectivamente tengo un sobrino y también porque a él le encanta jugar con mis cosas). Claro que tengo que poner a prueba la hipótesis, pero para hacerlo hay formas diversas, que si lo que estoy haciendo tiene que ver con la ciencia, será el método científico.

Esta forma de pensar es la que conduce a la invención, también a la explicación y, también, a lo que otros llaman serendipia. Y es la forma más natural de pensar, que como veremos, está muy emparentada con la analogía, la recurrencia, los modelos y los chistes.

Y cuando a los niños se les posibilita inventar explicaciones, cuando se encomian las explicaciones y generalidades que inventan, ¡eso sí que es satisfactorio!, pues genera orgullos y confianza en sí mismos.

Un ejemplo monumental: El salto de la rana

Veremos en este caso de manera muy clara y variada procesos de elaboración de las hipótesis. Hay detalles de los procesos que son totalmente inesperados. De todas maneras, es conveniente que antes de leer el artículo (o de seguir leyendo este escrito) se haya jugado el juego (el salto de la rana). Eso le dará sentido a muchas de las propuestas que como hipótesis plantean los estudiantes y a nuestras consideraciones.



En la figura se muestra la disposición de las fichas en el juego, que consiste en hallar la manera más eficaz de pasar de un punto de partida (primera fila en la figura) a uno final (en el que todas las fichas negras estarán a la derecha y las blancas a la izquierda), en el menor número de jugadas, siguiendo unas reglas que para el caso son muy sencillas. Las jugadas pueden ser dos: (1) moverse a un espacio vecino que esté vacío o (2) saltar sobre una de otro color si al otro lado hay un espacio vacío. En la figura la primera jugada es ejemplo de la regla (1) y la segunda, de la regla (2).

Como lo anotamos antes, en la figura tenemos el punto de partida para el juego en donde comenzamos con cuatro fichas negras y cuatro fichas blancas. Las filas siguientes son las primeras dos jugadas correctas. El número mínimo de jugadas para diferentes números de fichas, se muestra en la tabla en donde ***N*** es el número de fichas de cada color y ***Y*** es el número mínimo de movimientos. Así, la tabla nos dice que el juego se puede solucionar con un mínimo de 24 jugadas si se juega con cuatro fichas de cada color.

N	**Y**
1	3
2	8
3	15
4	24

El reto es establecer cuál es el número mínimo de jugadas para cada caso. La tabla anterior nos dice que para tres fichas el mínimo de jugadas es 15. ¿Cuál será el mínimo número de jugadas si jugamos con, por ejemplo, 100 fichas negras y 100 fichas blancas?

El reto es establecer una estrategia o una fórmula para lograr esta anticipación. Los matemáticos ya han establecido que la respuesta se puede averiguar con la fórmula siguiente.

$$Y = N(N+2)$$

Veamos ahora tres propuestas o soluciones que plantean los estudiantes.

El cuento es para contarlo

1. Planteamiento del problema

   Dado un número de fichas establecer cuál es el número mínimo de jugadas para lograr del objetivo del juego.

   En la tabla anterior vemos que para 3 fichas el número mínimo de movimientos es 15 y para 4, es 24. La pregunta es entonces, ¿cuántas jugadas se requerirán para 5 fichas y para 6 fichas y, en general, para N fichas?

2. Una manera de resolver la pregunta es jugar efectivamente el juego, ahora bien, como lo anotamos antes, por las matemáticas elementales sabemos que la ley de formación es $Y=N(N+2)$ y que para $N = 5$, Y será 35; esto es, para cinco piezas de un color, requeriremos de mínimo 35 jugadas, pero esto no lo saben los estudiantes y como veremos, lo que ellos se inventan es mucho más interesante.

3. Mostraremos tres soluciones distintas propuestas por estudiantes entre los 12 y los 15 años.

   - La primera aproximación propuesta por los estudiantes resulta de una disposición espacial de los números en una tabla como la que se muestra a la derecha.

     Observemos cómo los números de las columnas son las tablas de multiplicar y se escriben
     hasta 3 para N=1,

hasta 8 para N=2,
hasta 15 para N=3,
hasta 24 para N=4 y
hasta 35 para responder la pregunta acerca del numero de jugadas para cinco fichas (N=5).
Si fuera para 6 fichas tendríamos 42+6 = 48 jugadas.

1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
	8	12	16	20	24
		15	20	25	30
			24	30	36
				35	42

La tabla es entonces una estrategia de predicción y se propone “porque funciona”.
¿Cómo llegaron a ella?, no sabemos, pero seguramente es un trabajo colaborativo entre varios grupos o mesas de trabajo.
Ahora bien, esta no es la única respuesta que se plantea utilizando tablas, realmente identificamos otras cinco opciones distintas y los niños se refieren a ellas como “hacer escaleras” (ver Segura, D., 2018).

- El ejemplo siguiente es particularmente interesante pues combina la representación gráfica con el pensamiento recurrente. El cálculo del número de jugadas ara cada caso (esto es, para cada *N*) resulta de un procedimiento fijo que involucra el resultado del *N* anterior (esto es, de *N-1*). Veámoslo.

La figura muestra los tres puntos de partida del juego, para N=1, N=2 y N=3

La solución que encuentran es bastante sorprendente, a partir de este dibujo, afirman que,

Para *N=1, Y* es 3, que es el número de dibujos (esto es, de celdas)
Para *N=2, Y* es 8 que es el número de dibujos (5) más los 3 de *N = 1.*
Para *N=3, Y* es 15 que es el número de dibujos (7) más los 8 =de *N = 2*
Podríamos anticipar que **para cuatro fichas** el número mínimo de jugadas será Y = 9 (número de dibujos o celdas) + 15 (que son los de Y = 3). Esto es, 24.
Y, para las cinco fichas Y = 11 + 24 = 35.
Y, así sucesivamente.

Cómo llegaron a inventar esta solución que toma como punto de partida el dibujo de la disposición de las fichas, es bastante misterioso. Lo curioso es que funciona. Démonos cuenta de que en este caso la estrategia funciona pero no se sabe por qué. *Es una solución sin explicación*.

- Una familia de soluciones utiliza las recurrencias numéricas. Veamos esta (op. cit. pg. 85), que es bastante ilustrativa,

  El valor de *Y* se obtiene del anterior *(Y-1),* así:
  Tomas el valor de *Y-1*, le sumas 3 (que es una constante) y el par siguiente en la sucesión 0, 2, 4, 6, 8 etc. Por ejemplo,
  Para *N = 2* tomas el ***Y*** correspondiente a *N-1*, esto es **3.**
  Le sumas **3** (que es una constante) y el par siguiente a 0, que es **2**
  Y = 3 + 3+ 2 = **8**
  Para *N* = 4, tomas el ***Y*** correspondiente a *N – 1*, esto es **15**, le sumas **3** (que es una constante) y el par siguiente a 4, esto es **6**
  Y = 15 + 3 + 6 = **24**
  Y así siempre.

4. Consideraciones.- Hasta el momento hemos ilustrado tres de las soluciones inventadas, en el libro referenciado tenemos 18 soluciones escogidas de entre más de las 25 que se obtuvieron en la experiencia. Recapitulemos, en qué estamos.

Dividir un cuadrado en partes iguales y armar esculturas con las partes …

Estamos mostrando el ejercicio de *el salto de la rana* como un ejemplo para ilustrar cómo los estudiantes elaboran estrategias (hipótesis) para solucionar el problema que en este caso es *establecer el mínimo número de jugadas que se requieren para solucionar el juego para un número dado de fichas*. En esta búsqueda identificamos los siguientes elementos.

- El que los estudiantes se embarquen con cierto entusiasmo en la búsqueda de una regla general para predecir el número mínimo de jugadas para este ejercicio es una consecuencia de ambientes de trabajo-estudio similares que se dan con mucha frecuencia en la EPE. Tanto, que los estudiantes suelen referirse a estas actividades diciendo que lo que debe buscarse es *"el truquito"* y existe la convicción de que hay un "truquito" que debemos encontrar para solucionar la pregunta, esto es, que hay una regularidad que hay que descubrir.

- Por otra parte, en las hipótesis que se enuncian como herramientas para conocer el número mínimo de jugadas no podemos decir que los estudiantes descubran las regularidades, lo que sucede es otra cosa, ellos se inventan las regularidades.

- El que exista la fórmula estándar para resolver el problema no puede llevarnos a que lo que hay es hacer es aprenderla y aplicarla. Nuestra tarea es incentivar a los alumnos a buscar otras posibilidades. La verdad en matemáticas no es una, ni única.

- Aunque algunas propuestas resultan de las reflexiones de alguien individualmente, casi siempre son el resultado del trabajo colaborativo de varias personas, en donde con frecuencia los unos se copian de los otros para inventar otra propuesta mejorando la anterior. Lo que se logra siempre es referido como el resultado del trabajo de todos, lo que no impide que entre ellos se sepa cuál es el más listo trabajando en matemáticas.

- La decisión última de si una propuesta de solución o hipótesis de verdad cumple con las exigencias establecidas no está en manos del maestro sino del grupo. Son ellos, los estudiantes quienes decide si la hipótesis vale o no.

2. Bibliografía

(La bibliografía general de las cartillas en matemáticas se incluyó en la cartilla no 1)

Pierce, Lógica abductiva (s.d.)
Poincare, H. (2005) Ciencia e Hipótesis.
Segura, D. (2005) La multiplicidad de patrones y la inagotabilidad del pensamiento. En *Hacia una escuela contemporánea. La práctica hecha teoría*. (2017) C.5. Bogotá: Magisterio.